SCHRÖDINGER e LEBESGUE,
o GATO e o RATO

Carlos A. de Moura

Pesquisador Visitante dos Programas de Pós-graduação em Ciências Computacionais (IME) e Engenharia Mecânica (FEN) da UERJ

demoura@ime.uerj.br

RESUMO

A retórica felina criada por Erwin Schrödinger no século passado contestava os fundamentos da Mecânica Quântica. Ela recebe neste trabalho como contrapartida uma outra figura, esta associada à teoria matemática da integral de Lebesgue.
O aparente paradoxo das funções definidas apenas em conjuntos conhecidos em quase toda parte induz à conclusão de que elas estão definidas em parte alguma. Essas idéias, as associamos então a uma angústia doméstica de Henri Lebesgue, cujo rato de estimação ele nunca chegou a conhecer.

O gato de Schrödinger já passou dos 80 anos. Foi em novembro de 1935 que a Naturwissenschaften anunciou a dúvida hamletiana do seu criador, cf. [SCHRÖDINGER]. No decorrer dessas oito décadas, ele se tornou um felino famoso, tendo até saído do domínio da Física para inspirar itens de consumo, além de estar presente em diferentes meios de criação, como poesia, música, ficção, cf. [WIKIPEDIA].

A profunda descoberta matemática de Lebesgue data de mais de um século. Os gregos, com o método introduzido para calcular áreas de figuras planas limitadas por curvas, inspiraram a teoria da chamada integral de Riemann, cf.[RIEMANN], que se mostrou insatisfatória em diferentes contextos. Foi Henri Lebesgue, em [LEBESGUE], quem introduziu um conceito mais poderoso de integração, o qual ganhou seu nome.

O experimento proposto por Erwin Schrödinger com a mortal ameaça a um gato era mais uma figura de retórica que uma rigorosa justificativa da inadequação do modelo teórico da mecânica quântica sob sua crítica. Mas é a lógica binária em que ele se baseia que justamente conduz à associação a outro animal, que continuamente perturbava Lebesgue ao buscar silêncio na solidão do seu sótão. Apenas ele visitava aquele aposento, entulhado de caixas, valises, gavetas, sacolas, prateleiras, todos também entulhados de livros, cadernos, anotações, rascunhos, folhas de papel emboladas ou rasgadas que ele ainda não conseguira descartar. Mas sistematicamente era ele afastado do pretendido sossego pelos indícios de outra presença oculta pelos meandros e labirintos que ele mesmo criara com a celulose como matéria prima. Estava convencido de que compartilhava o sótão com (ao menos) um camundongo.

É central na teoria da integral de Lebesgue, a noção de medida zero: um conjunto **A** tem medida zero quando é possível encontrar, para cada $\varepsilon > 0$ arbitrariamente escolhido, uma família enumerável de intervalos $\{ J_{\varepsilon i} \}$ tal que, sendo $m_{i\varepsilon}$ a medida do comprimento[1] de cada $J_{\varepsilon i}$, valem

$$\mathbf{A} \subset \cup_{i=1} \quad J_{\varepsilon i}, \quad i=1 \quad m_{i\varepsilon} < \varepsilon.$$

Com pouco esforço se verifica que qualquer conjunto finito ou enumerável possui medida zero. A dedução da existência de conjuntos não enumeráveis com medida zero é mais sofisticada, o exemplo padrão sendo o conjunto **C**, chamado de Cantor.

Para arbitrários números reais $a < b$, seja **I** o intervalo $[a,b]$ e, denotando por δ sua medida, representamos por I_+, I_-, respectivamente, os subintervalos disjuntos $[a, a + \delta/3]$ e $[b - \delta/3, b]$. Construímos indutivamente uma sequência decrescente de subconjuntos compactos de I, cada um deles

[1] Mencionada apenas como medida, no que segue.

formado pela união $\bigcup_{i=1}^{2^n} I_{i,n}$ de 2^n subintervalos fechados, dois a dois disjuntos:
Seja C_1 a união $I_+ \cup I_-$; construído C_n , para $n \geq 1$, com 2^n intervalos, introduzem-se, de forma análoga à construção de $I_\pm$ a partir de I, os 2^{n+1} intervalos

$$\{I_{i,n+}\ ,\ I_{i,n-}\ ,\ j=1,2,3,...,2^n\}$$

e define-se então o conjunto C_{n+1} como a união desses subintervalos, também disjuntos.

O conjunto de Cantor, associado a I , é então o compacto não vazio

$$\mathbf{C} := \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j \,.$$

Da mesma forma como μ_1, a medida de C_1, soma do comprimento dos intervalos que o compõem, satisfaz

$$\mu_1/\delta = 1-(1/3) = 1-2^0(1/3^1) = 2/3,$$

pode-se deduzir que a medida de C_{N+1} obedece à estimativa

μN+1 = 23N - 2N13N+1= 3 2N3N+1-2N3N+1= 23N+1 .

Assim, à medida que N cresce, a medida de C_N se torna cada vez menor, donde segue que se tem[2] para a medida de **C**, m(**C**) = 0, pois

$$\mathbf{C} \subset C_N \;\Rightarrow\; m(\mathbf{C}) \leq \mu_N.$$

O conjunto de Cantor é um exemplo de conjunto infinito, não enumerável mas de medida zero. Para demonstrá-lo, notemos que a representação de seus elementos, no caso de I = [0, 1], se simplifica ao usarmos a base 3, como veremos a seguir.

Os elementos de I estão associados à representação ternária

$$r = (d_1,d_2,...,d_k,...) \Longleftrightarrow r = \sum_{k=1} d_k/3^k,\ d_k \in \{0,1,2\}\ , \qquad (1)$$

que não é necessariamente unívoca – observe, por exemplo: para 1/3 e 2/9,

$$(1,0,0,0,...) = (0,2,2,2,...) \text{ e } (0,2,0,0,0,...) = (0,1,2,2,...)$$

são, respectivamente, duas representações desses números. A fim de nos ater a uma representação única, descartamos aquela “quase nula”[3], optando pela que lhe é “imediatamente inferior”[4].

---

[2] Propriedades da medida podem ser consultadas em [RUDIN, BARTLE], por exemplo.

[3] Isto é, que possui apenas um número finito de elementos não nulos.

[4] Uma sequência numérica é considerada inferior a uma outra se cada um de seus

A exclusão do segundo terço (aberto) de I equivale à restrição d_1 1 para os elementos de C_1 . Da mesma forma, os elementos de $C_2 \subset C_1$ estão sujeitos adicionalmente à condição d_2 1. E, assim, sucessivamente, donde se deduz que, para qualquer elemento de **C**, tem-se d_k 1, $\forall$k natural. Os dados em (1), juntos com essa restrição, permitem estabelecer uma correspondência biunívoca entre **C** e I, via representação binária dos elementos do segundo conjunto. Esse um raciocínio que garante não ser enumerável o conjunto de Cantor.

Vale a pena mencionar outra propriedade do conjunto de Cantor, qual seja, a de ser um conjunto *perfeito*. Isto significa que qualquer de seus elementos é um de seus pontos de acumulação e – sendo ele fechado – são eles os únicos.

A demonstração é imediata. Dado um elemento r $\in$ **C**, consideramos sua representação ternária (1) e a “truncamos sucessivamente”; em outras palavras, a sequência de elementos $r_M \in$ **C** definida por

$$r_M := j{=}1M\, d_j/3^j$$

aproxima r .

Lebesgue descobriu uma integral que exige generalizar o conceito de funções. Para estas, a cada elemento de um dado conjunto fixo – o seu domínio – está associado um (único) elemento de outro conjunto, também determinado a priori, o seu contradomínio. A chamada integral de Lebesgue é definida para classes de equivalência de funções. Duas funções são consideradas equivalentes quando os valores que elas assumem coincidem, exceto apenas para um subconjunto – do domínio comum – que tem medida zero. Diz-se serem elas iguais q.t.p., ou seja, que elas coincidem em quase toda parte; o subconjunto dos pontos onde seus valores são distintos tem “pouco peso”, podemos pensar.

Dado um elemento para o qual se define a integral de Lebesgue, dito função generalizada[5], não tem sentido indagar o seu valor em um ponto fixo, arbitrário. De fato, conforme já observamos, um conjunto finito de reais tem necessariamente medida zero. Assim, se considerarmos uma função representante de uma dada classe de equivalência, qualquer outra função que lhe for equivalente pode assumir um valor distinto daquele que ela assume em um ponto arbitrário do seu domínio. Conclui-se, pois, que para qualquer função generalizada, fixado um ponto, nenhum valor está associado a ele no seu “contradomínio”, visto que cada representante dessa classe pode assumir (e de fato assume) um valor qualquer naquele ponto. Uma outra forma de analisar: as funções representantes são aparentemente

elementos é menor ou igual ao elemento correspondente da outra.

[5] Terminologia com diferentes significados em diferentes contextos.

semelhantes mas não podemos nos fixar em alguns de seus detalhes numéricos. . .

Pensemos na função generalizada associada à função identicamente nula. (No contexto de espaço vetorial, este seria o elemento zero.) Ao escolher para um ponto do domínio onde estamos considerando a integral, não faz sentido dizer que aí a função assume o valor zero: as funções nessa mesma classe de equivalência assumem nesse ponto todos os valores reais.

Chegamos assim a uma conclusão que seguramente pode parecer estranha: da função (generalizada) zero não se pode dizer que ela se anula num dado ponto e, portanto, em ponto algum. . . Não podemos apontar nenhum ponto no qual a função zero se anula!

Essa a mesma angústia da qual Lebesgue era tomado no seu sótão. Tinha certeza de aí estar o rato (ou um camundongo, ou uma ratazana?). Seguro de encontrar o animal ao abrir uma caixa, ali o invasor não mais se encontrava. Esperava outro ruído, aparentemente localizava sua origem, somente para repetir a frustração de, no volume que abria, contemplar apenas os seus intrincados manuscritos, que lhe continuavam pedindo a sempre atrasada revisão.

A princípio imaginou ele que o fenômeno que vivia serviria para exemplificar suas funções definidas q.t.p., mas logo viu que faltava ali a variável temporal. Ainda assim, juntou aos tantos projetos adormecidos no sótão o de redigir umas notas didáticas associando a busca dos valores das funções generalizadas em um dado ponto do seu domínio à sua procura jamais concluída pelo roedor escondido, **o rato de Lebesgue**.

Tivesse vivido Lebesgue mais alguns anos e contemplaria a semelhança entre o gato de Schrödinger e a generalização que descobrira para as funções: não se sabe se o gato está vivo ou sucumbiu ao aparato mecânico-nuclear, da mesma forma como não se sabe se uma dada função generalizada é ou não a função nula, a partir dos seus valores em um dado ponto. Como o rato que ele procurava no sótão: ali seguramente deveria estar ele, mas encontrá-lo. . .

Referências

[BARTLE] Bartle, Robert G. (1966). "The elements of integration", New York: Wiley.

[LEBESGUE] Lebesgue, Henri (1904). "Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives". Paris: Gauthier-Villars.

[RIEMANN] Riemann, Bernhard (1868). "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" (On the representability of a function by a trigonometric series). Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Proceedings of the Royal Philosophical Society at Göttingen), vol. 13: 87–132. Available on-line: https://books.google.com.br/books?id=PDVFAAAAcAAJ&pg=RA1-PA87&redir esc=y=||v=onepage&q&f=false

[RUDIN] Rudin, Walter (1976). "Principles of Mathematical Analysis", New York: McGraw-Hill, 3rd ed.

[SCHRÖDINGER] Schrödinger, Erwin (November 1935). "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik (The present situation in quantum mechanics)". Naturwissenschaften 23 (49): 807–812. doi:10.1007/BF01491891

[WIKIPEDIA] https://en.wikipedia.org/wiki/Schroedingers cat in popular culture (Consultada em: 3/X/2015)