

Trigonometric analysis applied to identification of dynamic patterns in neuropsychopedagogical game time data

Análise trigonométrica aplicada à identificação de padrões dinâmicos em dados temporais de game neuropsicopedagógico

Myriam Kienitz Lemos¹, Marcelo Miranda Barros², Wolfgang Kurt Kienitz³, Maira Monteiro Fróes¹

¹ Programa de Pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro

² Departamento de Estruturas, Universidade Federal de Juiz de Fora

³ Colaborador Independente (*in memoria*)

myriamkitz@gmail.com, marcelomirandabarros@gmail.com, froes@nce.ufrj.br

Recebido: 27/04/2021

Aceito: 29/04/2021

Publicado: 04/05/2021

DOI: 10.51919/revista_sh.v1i0.279

Abstract. *Dynamic patterns are expected in systems of non-linear behavior. However, their mathematical characterization is often a challenge. Actions performed by players on mouse clicks in the game Jogo dos Elásticos (KIENITZ LEMOS, 2013) reflect changes in cognitive behavior. We have developed an analytical method, whose parameter, the deflection angle, is defined from differences in angular measurements generated by trigonometric treatment of the time elapsed between actions, assumed as a dependent variable in our model. Statistical treatment suggests three apparently distinct groups. Also detectable an oscillatory behavior of the time variable, suggesting a system prone to a dynamic balance.*

Keywords. *Standards. Trigonometry. Deflection angle. Neuropsychopedagogical game. Cognition.*

Resumo. Padrões dinâmicos são esperados em sistemas de comportamento não linear. Sua caracterização matemática, no entanto, é frequentemente um desafio. Ações realizadas por jogadores em cliques no mouse no game Jogo dos Elásticos (KIENITZ LEMOS, 2013) refletem alterações de comportamento cognitivo. Nós desenvolvemos um método analítico, cujo parâmetro, o ângulo de deflexão, é definida a partir de diferenças angulares geradas por tratamento trigonométrico do tempo entre ações, assumido como uma variável dependente em nosso modelo. O tratamento estatístico sugere três grupos aparentemente distintos. Também detectável um comportamento oscilatório da variável tempo, sugerindo um sistema tendente ao equilíbrio, dinâmico.

Palavras-chave. Padrões. Trigonometria. Ângulo de Deflexão. Game neuropsicopedagógico. Cognição.

1. Introdução

O estudo de padrões em comportamentos complexos tem contribuído para o avanço científico na caracterização de diversos fenômenos e expressões na natureza que vão desde a dinâmica dos fluidos, na geração de ondas e na velocidade dos ventos (MONTEIRO, 2017), assim como em registros de ocorrências de fenômenos humanos, a exemplo do ritmo dos batimentos cardíacos (CREANGA, 2009) e da análise não linear para a identificação de padrões sonoros em séries de sons pulmonares humanos (CUSTÓDIO, 1999). O alargamento deste campo se intensificou com o advento da computação e a automação da visualização de dados, possibilitando o exercício de simulações matemáticas que pudessem testar, com precisão e rapidez, hipóteses de organização/estruturação dos dados.

Sistemas lineares, caracterizados por comportamento simples, produzem respostas dentro de margens estatísticas previsíveis, como o avanço do tempo marcado por um relógio. Sistemas dinâmicos não lineares, caracterizados por comportamento complexo, produzem resultados muitas vezes caóticos, imprevisíveis, identificáveis pela rugosidade das curvas geradas por representação gráfica. Padrões dinâmicos, portanto variáveis no domínio do tempo, são esperados nestes sistemas. Caracterizá-los matematicamente, no entanto, é frequentemente um desafio.

A geometria fractal tem sido estudada e aplicada na solução de problemas em diferentes áreas de conhecimento a partir, justamente, da análise da rugosidade de bordas, linhas, materiais. A dimensão fractal, segundo Mandelbrot (1982) é uma medida do grau de rugosidade. Mandelbrot (2006) assegura que a rugosidade está em toda parte e é um parâmetro considerado para descrever formas da natureza, superfícies de metais e interpretar variações do clima e ainda na modelagem da intermitência de processos turbulentos. Fenômenos diferentes que podem ser abordados essencialmente com as mesmas ferramentas (MANDELBROT, 2006).

Neste estudo, adotamos a matemática como alicerçal na identificação de padrões de ordem que possam ser, em algum aspecto, ancorados em universais como os estágios adaptativos (PIAGET, 1987) definidos como constituintes da dinâmica da cognição, um sistema complexo em si mesmo, e que está constantemente nos desafiando a abordagens interdisciplinares. De forma ainda exploratória, relacionamos os padrões matemáticos, sugeridos em nosso modelo, a propriedades biofísicas estabelecidas em sistemas biológicos complexos. Utilizamos como fonte de dados experimentais logs correspondentes ao registro das ações (cliques no mouse) de 20 jogadores na linha do tempo, realizadas em situação de um jogo computacional denominado Jogo dos Elásticos (KIENITZ LEMOS, 2013).

Desenvolvemos um sistema analítico, ou método, cuja medida mais importante é o ângulo de deflexão, definido a partir de diferenças de medidas angulares, geradas por tratamento trigonométrico dos valores consecutivos assumidos por uma variável

dependente, o tempo decorrido entre ações. Tais intervalos individualizam, distanciando no tempo as ações dos jogadores no Jogo dos Elásticos, presumidas como resultados expressivos de processamentos de ordem cognitiva. Aplicamos tratamento estatístico aos parâmetros obtidos a partir da representação gráfica dos dados, a partir da análise de Coeficientes de Forma e Simetria, aqui também propostos.

Três curvas típicas parecem agregar conjuntos de experiências jogo-jogador matematicamente distintos, tendo como base perfis de distribuição de frequência dos ângulos de deflexão. Observou-se um comportamento do tipo oscilatório das variáveis medidas, sugerindo a prevalência de um equilíbrio dinâmico do tempo entre ações do jogador em relação sistêmica com o jogo.

2. Materiais e Métodos

2.1 Caracterização dos dados

Os *logs* produzidos por 20 voluntários que participaram de uma única aplicação piloto do Jogo dos Elásticos¹ constituíram nossa base de dados para a análise. O *playtime* foi definido por cada participante e constituiu num registro estático (*frame*) de sua produção cognitiva naquele momento. Nenhum dos participantes possuía qualquer informação prévia acerca do jogo.

Os dados no jogo são registrados no formato de texto (.txt) no *log*, em que cada ação é classificada por um ID (identificador), à qual corresponde o tempo cronológico em que esta se consolida. Ao representarmos graficamente as ações (*timestamps*) como marcas (pontos) na linha de tempo cronológico, observamos a irregularidade da distribuição evidenciada tanto para a *timeline* individual quanto para o conjunto de *timelines* tal como mostrado na Figura 1.

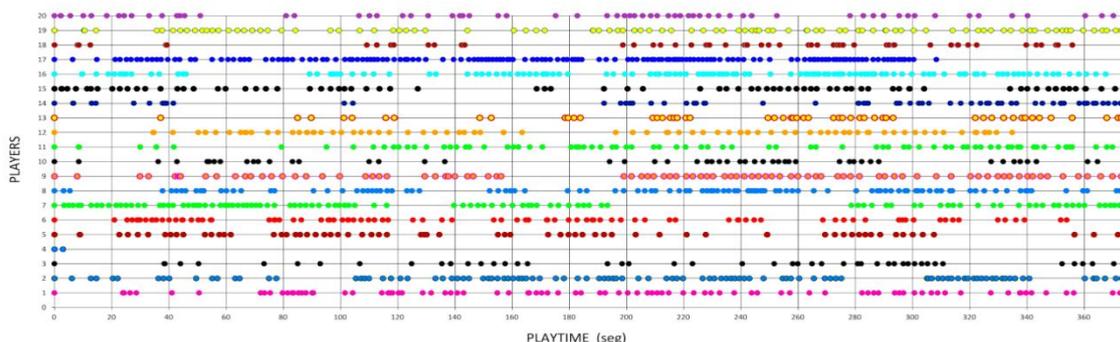


Figura 1. Recorte de *timestamps* iniciais de 20 indivíduos no Jogo dos Elásticos.

A irregularidade dos intervalos de tempo entre ações, evidentes na Figura 1 pelo espaçamento entre marcas, fortalece nossa expectativa de que a esperada complexidade de um sistema jogo-jogador possa se fazer refletida nas medidas extraídas do jogo.

¹ O Jogo dos Elásticos, uma versão digital do original em material manipulável de autoria de Marques (2017) integra um conjunto de outros jogos neuropsicopedagógicos que são estudados há mais de 15 anos pelo grupo de Games Inteligentes, da linha de pesquisa Informática, Educação e Sociedade do Instituto Tércio Pacitti de Aplicações e Pesquisas Computacionais NCE (UFRJ).

Junto com a irregularidade, a sugestão de imprevisibilidade compõe aspectos de comportamento típico de sistemas caóticos e/ou complexos. Sendo assim, na abordagem em dimensões tanto conceituais quanto metodológicas, precisamos considerar as dificuldades inerentes à instrumentação para análise técnica e interpretação, enfrentadas diante de sistemas dinâmicos não lineares.

2.2. Conversão linear para angular

Os dados foram apresentados no plano cartesiano onde o eixo das abscissas corresponde à ordem indexal das ações do jogador no jogo, resumidas ao comando de clique do mouse, enquanto o eixo das ordenadas corresponde ao tempo decorrido (*timeline*). Desta forma, define-se $t(i)$ onde t representa o instante de tempo em que ocorreu a ação $i = 1, 2, \dots, n$, representado pela *timeline* associada a um dado Jogador (Figura 2, traçado azul). Para cada par de rótulos de dados consecutivos, calculamos medidas angulares α que correspondem a inclinações das retas que ligam os rótulos de dados consecutivos no intervalo $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, de forma que $\alpha_i = \tan^{-1}(\Delta t_i)$. A representação do comportamento do jogador por meio do ângulo α_i equivale a uma normalização visto que o tempo entre ações pode ter qualquer duração enquanto que o ângulo é limitado, i.e. $\Delta t_i \in (0, \infty)$ e $\alpha_i \in (0, \pi/2)$. Variações do tempo entre ações determinam variações do ângulo α_i . Às medidas de diferença entre valores α consecutivos, denominamos β , ou melhor, ângulos de deflexão β . Sendo assim, $\beta_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i$ e $\beta_i \in (-\pi/2, \pi/2)$. A curva magenta (Figura 2) exemplifica graficamente as variações do ângulo de deflexão β em nosso sistema, conforme avançam as ações do jogador.

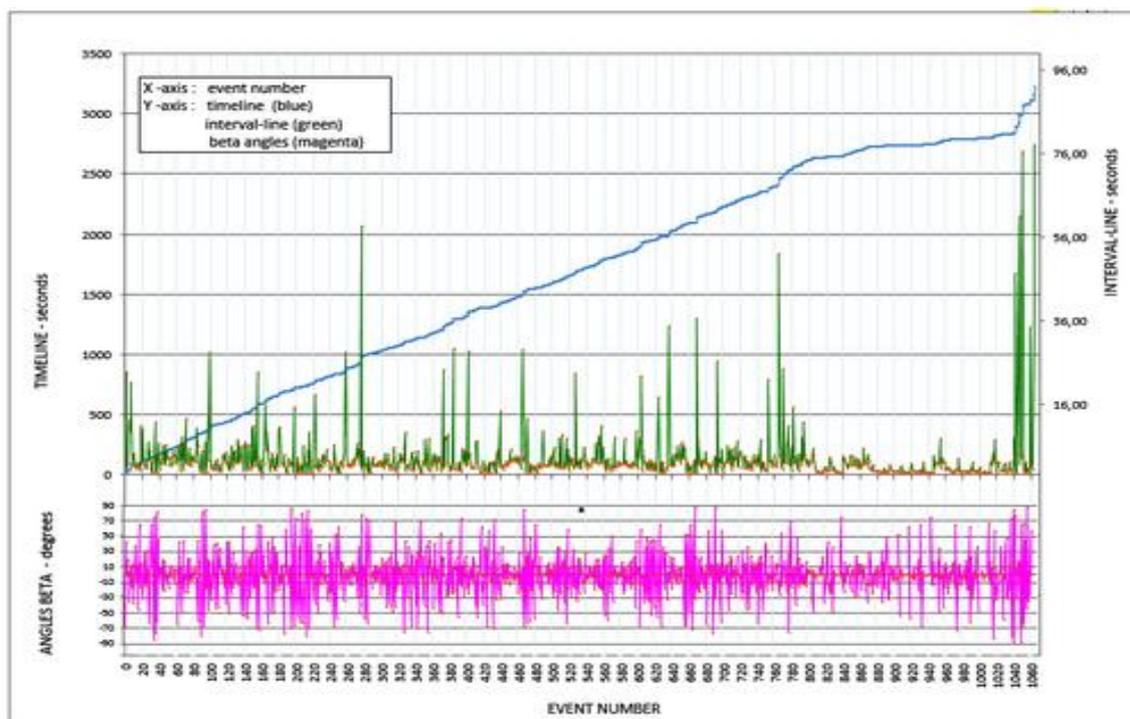


Figura 2. *Timeline* (azul), intervalos de tempo entre ações (verde) e o ângulo de deflexão β (magenta) do dado produzido por um dos jogadores.

Medidas lineares são convertidas em angulares. Apostamos, através dos parâmetros trigonométricos aqui identificados, que a normalização dos dados possam melhor adequar nosso sistema ao diagnóstico de padrões e mostrar matematicamente modos distintos de desenvolvimento de nosso sistema jogo-jogador em meio ao aparente comportamento caótico, desordenado, observado nas curvas originais, favorecendo a revelação de padrões periódicos e tornando a comparação mais direta. A representação gráfica destas medidas inspira, para além disso, análise de correspondência topográfica que aqui também exploramos de forma preliminar.

2.3. A *timeline* invertida

Em geral, nos registros temporais a escala de tempo é representada graficamente na abscissa, e a sequência de atividades, ou medidas correspondentes, na ordenada. Contudo, esta disposição dificulta a compreensão das relações e conversões trigonométricas demandadas para análise de padrões inerentes às curvas de dados. Numa *timeline*, tempo e ações progridem ascendentemente. Quando as ações e a escala de tempo são organizadas no eixo vertical (y), a sequência de pontos inexoravelmente se eleva, pois estamos diante de um gráfico cumulativo no tempo cronológico. Curvas construídas com estas propriedades melhor se aplicam à análise do ângulo β . Optamos por uma representação inversa, ou seja, uma *timeline* invertida, a que chamamos simplesmente de *timeline*. Portanto, todas as referências feitas à *timeline* em nosso estudo correspondem à *timeline* invertida. Por conveniência, fixamos o espaçamento entre duas ações consecutivas em uma unidade, em teoria, adimensional.

As ações de um dado jogador, resumidas a cliques do mouse a intervalos variáveis de tempo, inspiram analogias com parâmetros da física clássica como velocidade variável, a partir da qual grandezas associadas à prováveis equivalentes de força atuantes no sistema, como aceleração e desaceleração, determinariam como as ações seriam intervaladas no tempo. Apostamos que equivalentes destas forças estejam refletidos, total ou parcialmente, nos valores assumidos pelo ângulo de deflexão β_i . O sistema jogo/jogador estabelecido na experiência estaria submetido a forças análogas à aceleração, ora retrógrada, ora anterógrada, evidenciáveis pela análise matemática funcional das variáveis estudadas.

Propõe-se, portanto, um paradigma investigativo do comportamento humano onde o tempo deixa o lugar comum, de variável independente, tempo exclusivamente cronológico, para tornar-se um intervalo do tempo cronológico, e definido, momento a momento, pelo indivíduo. O comportamento do indivíduo é registrado no tempo investido entre as ações. Buscamos, no estudo das variações de tempo entre ações, pistas investigativas, de natureza matemática, que venham a revelar correspondências de ordem cognitiva e/ou biofísica com a estruturação da dinâmica jogo-jogador.

2.4. Tratamento matemático

Distribuições de frequência obtidas a partir das medidas β foram determinadas para cada um dos 20 *playtimes*. Os valores β foram divididos em intervalos de variação e , para cada intervalo, levantamos a respectiva taxa de ocorrência f_β , normalizada para o

total. Para o caso particular das curvas geradas a partir de dados do Jogo dos Elásticos utilizamos a função Frequência do Excel (Microsoft Corporation, 2007).

As curvas de distribuição de frequência assim obtidas foram avaliadas quanto à parâmetros matemáticos, refletidos na maior ou menor simetria destas curvas em relação aos valores de pico. Criamos assim um **Coefficiente de Forma (Φ)**, expresso como média do somatório das frequências, à direita (positivas) e à esquerda (negativas) do pico da curva, matematicamente expresso por

$$\Phi = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} [f_{(n)} - f_{(n+1)}] + [f_{(-n)} - f_{(-n-1)}]}{f_{(0)}}$$

onde N corresponde ao número de intervalos positivos, e que se iguala aos negativos. As distribuições de frequência β dos 20 conjuntos de dados em estudo revelaram características comuns de simetria. A fim de avaliar quantitativamente o grau de simetria de uma dada distribuição de frequência das medidas β definimos um segundo coeficiente, o **Coefficiente de Simetria (Ψ)**, apresentado pela seguinte expressão

$$\Psi = \frac{\sum_{n=1}^N |f_{(n)} - f_{(-n)}|}{\sum_{n=-N}^N f_{(n)}}$$

Propomos, assim, um sistema analítico para diagnóstico de possíveis padrões, e que integra o Método do Ângulo de Deflexão.

3. Resultados e Discussão

3.1. Ângulos α e β como variáveis

Uma série temporal pode ser ilustrada pelo registro sucessivo de seus marcadores temporais ou *timestamps*. Ao subtrair um *timestamp* n de seu antecessor n-1, calcula-se o intervalo entre duas ações, ou seja, o tempo transcorrido de preparação do participante para a próxima ação n, em nossa experiência medido em segundos. Comentamos acima como esta medida pode ser, em níveis mais intuitivos que conceituais, comparável à velocidade, e suas variações mediante incidência de forças, conduzindo à equivalentes acelerações/desacelerações no sistema estudado.

Na conversão de medidas variáveis lineares (segundos/ação) para medidas trigonométricas, angulares (graus/ação) informações relevantes para a análise do sistema nos pareceram preservadas. Consideremos a representação gráfica da *timeline* em função da sequência de ações, e o círculo trigonométrico associado, definindo em detalhe os equivalentes trigonométricos do intervalo i, o ângulo α , e a relação de ambos através do cálculo da tangente ao ângulo, em que $i = t_g \alpha_n$ (Figura 3).

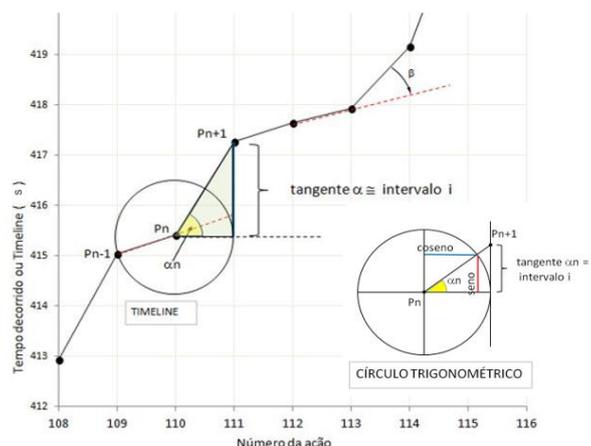


Figura 3. Correspondência interpretativa entre a *timeline* e o círculo trigonométrico.

A sequência de intervalos entre ações é representada pelos pontos, ou seja, os pares ordenados, arbitrariamente ligados por segmentos de reta. Trata-se de um plot cumulativo, em que os intervalos surgem como marcas no tempo cronológico. Observa-se, portanto, o desenvolvimento de uma curva crescente. Exemplos de medidas angulares α encontram-se indicados. Como vimos mais acima, definidas pela inclinação da reta que une os pontos de coordenadas de duas ações consecutivas, relativamente à projeção do eixo x, as medidas α se distribuem na faixa que vai de 0 a 90°. Refletem diretamente o intervalo de tempo transcorrido entre as ações. Conforme os intervalos de tempo entre ações crescem, as medidas α passam a ser comprimidas relativamente ao limite superior de 90°.

A rugosidade está presente nas *timelines* e é observável pelo caráter irregular dos intervalos de tempo entre ações sucessivas, estes representados graficamente pelos conectores artificialmente implementados entre os rótulos de dados, conforme já comentado acima. Estaria a rugosidade preservada ou degenerada nas curvas correspondentes aos valores β ? A rugosidade é um parâmetro cuja análise é central neste estudo. As curvas obtidas a partir das medidas β calculadas ao longo do jogo, correspondentes aos jogadores J2, J7 e J12 (Figura 4), ilustram a esperada conservação dos perfis gerais de rugosidade, e suas singularidades por jogador.

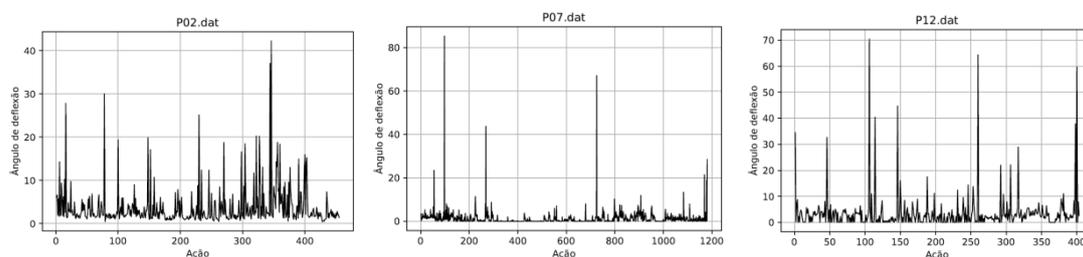


Figura 4. Perfis de rugosidade das curvas dos ângulos de deflexão β definidas para as experiências dos jogadores 2, 7 e 12.

3.2. Distribuição de Frequência (f_{β}) dos Ângulos de Deflexão (β), o Coeficiente de Forma (Φ) e o Coeficiente de Simetria (Ψ)

Como vimos, o ângulo de deflexão β reflete a variação no tempo entre ações consecutivas. Para análise estatística de medidas β obtidas a partir dos registros dos 20 jogadores, empregamos distribuições de frequência f_{β} , cujos intervalos de classe encontram-se apresentados na Figura 5. Valores β situados no intervalo entre 0 e 10° corresponderam ao pico de ocorrências em nosso sistema. Algumas curvas de distribuição de frequência β apresentaram decaimentos para intervalos de valores β negativos e positivos relativamente suaves em relação ao pico central (Figura 5, à esquerda). Outras distribuições apresentaram o crescimento dos valores de frequência nos limites negativos e positivos dos intervalos β (Figura 5, à direita). Um terceiro perfil, representado pela curva ao centro da Figura 5, revelou um pico ladeado por decaimentos abruptos dos valores de frequência. Portanto, estávamos diante, aparentemente, de três grupos morfologicamente distintos quanto às curvas de distribuição de frequências β .

Para fins de avaliação matemática destes perfis desenvolvemos dois coeficientes. O Coeficiente de Forma Φ corrobora os três perfis visualmente detectáveis na Figura 5. À esquerda, curva representativa dos jogadores 4, 8 e 11, além do jogador 2. À direita, curva representativa dos jogadores 3, 5, 15 e 19, além do jogador 12. Ao centro, dos demais jogadores, para além do jogador 7.

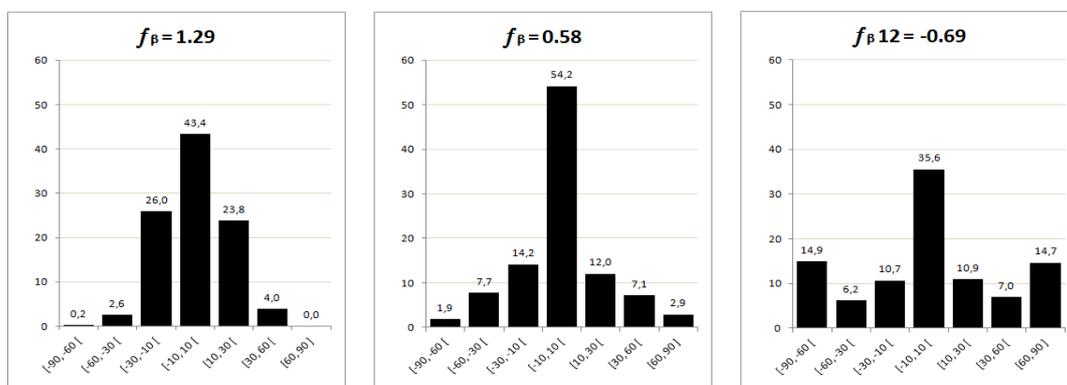


Figura 5. Três perfis emergentes das vinte curvas de distribuição f_{β} , correspondendo da esquerda para a direita valores, dados dos jogadores 2, 7 e 12.

O segundo coeficiente considera a simetria. A simetria é um padrão de ordem que se mostrou evidente nas distribuições de frequência dos ângulos de deflexão quando avaliado o conjunto dos jogadores. Taxas de incidência menores que a taxa de pico destas curvas, ou seja, calculadas para intervalos de valores de ângulo de deflexão β negativos contra valores β positivos passam por análise diferencial. Para tanto, desenvolvemos um Coeficiente de Simetria (Ψ), basicamente um somatório de incidências negativas e positivas β , definidas para os intervalos de classe de cada f_{β} . Podemos comparar valores Ψ definidos para os diferentes jogadores, e também avaliar a pertinência de análises estatísticas entre grupos sugeridos por outros critérios matemáticos, como vimos aplicar-se para o emprego do coeficiente Φ . A Figura 6 organiza em ordem crescente os valores de simetria obtidos do conjunto de jogadores.

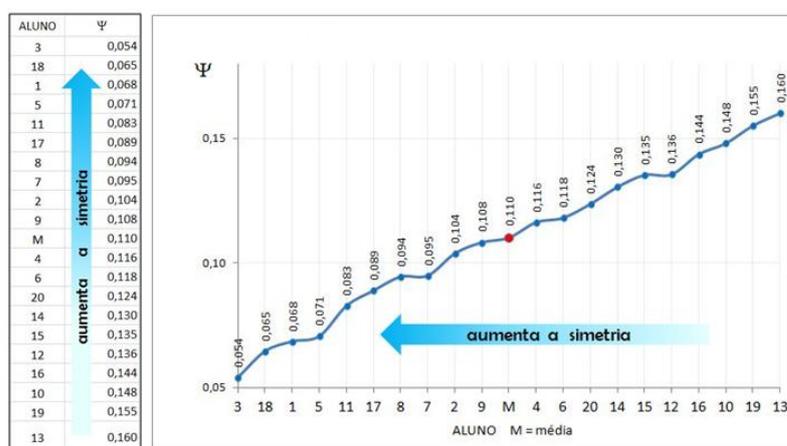


Figura 6. Ordenação dos jogadores pelo Coeficientes de Simetria. O jogador 3, por exemplo, parece definir distribuição com índice de simetria mais alto, quando comparado ao jogador 13.

A simetria presente nos gráficos de distribuições de frequências dos ângulos de deflexão sugere compensações, expressas na dimensão do tempo, de processos de aceleração da realização de ações (quando os intervalos de tempo entre ações encurtam), e de desaceleração (quando os intervalos de tempo entre ações dilatam). Numa perspectiva sistêmica, sugere que a dinâmica de variações observada tende a um equilíbrio. A sugerida compensação pode se dar para sequências de três ações, embora, possa também negar uma alternância imediata, apresentando-se na disposição geral dos intervalos.

Desenvolvemos um sistema de análise integrado pelo Método do Ângulo de Deflexão, aqui apresentado, baseado em parâmetros trigonométricos e estatística descritiva de distribuições de frequência. A comparação de dados extraídos dos diferentes jogos/jogadores sugere a existência de grupos, definidos por afinidade matemática. As análises iniciadas a partir de coeficientes de forma e de simetria, desenvolvidos como medidas de agrupamento dos dados nas distribuições de frequência do ângulo β , corroboraram sugestões qualitativas de padrões, obtidas à partir da inspeção e da comparação visuais, submetendo-as a um tratamento matemático preliminar que já avaliza direcionamentos futuros. A análise da simetria confirma um comportamento de natureza, aparentemente, oscilatória, sugerindo que uma compensação matemática das variáveis medidas esteja por trás de um equilíbrio embutido nos intervalos entre ações dos jogadores. O comportamento das distribuições de frequência dos ângulos de deflexão, bem como a análise de propriedades dinâmicas, prevê ensaios futuros, que serão conduzidos pelo grupo, na busca por testar correlações diretas ou inversas entre diferentes perfis matemáticos aqui sugeridos e os correspondentes perfis cognitivo comportamentais evidenciados pela análise qualitativa das ações dos jogadores em relação sistêmica com o Jogo dos Elásticos.

Abordagens não tradicionais como as que empreendemos aqui são arriscadas, nebulosas em certo grau, mas necessárias ao exercício de aproximações, e portanto, de apostas inovadoras. A proposta de uma *timeline* invertida afirma a possibilidade de um tempo, definido por intervalos, como variável dependente neste estudo. Aplicações ou adaptações deste método a outros conjuntos de dados, que considerem parâmetros associados à rugosidade gráfica na revelação de perfis/padrões, de outra forma invisibilizados nos dados experimentais, é um necessário tubo de ensaio. Destacamos,

neste sentido, os exercícios de correlação com parâmetros musicais já experimentados por nosso grupo em oportunidade recente (KIENITZ LEMOS et al. 2019).

5. Considerações finais

A tentativa de revelar ordens em sistemas complexos passa, frequentemente, pelo desenvolvimento de operadores funcionais que possam mais fielmente instruir ou dar pistas sobre estes sistemas, bem como afastar a, por vezes, perturbadora hipótese de aleatoriedade. Neste estudo, a aposta que fazemos é de que os parâmetros e padrões matemáticos inerentes à complexidade do sistema jogo-jogador estejam associados a marcos expressivos do comportamento humano em situação de aprendizagem e descoberta no jogo. O Jogo dos Elásticos serve de ambiente para expressão de indicadores cognitivo comportamentais a partir dos jogadores na experiência do jogo, mas também gera, no processo, o registro de parâmetros físicos de medida da experiência na interface humano-artefato que abre o caminho para o paralelismo aqui perscrutado entre processamento cognitivo e medidas associadas à ação.

Financiamento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências bibliográficas

ALMEIDA, M. W. B. **Simetria e entropia: sobre a noção de estrutura de Lévi-Strauss**. Revista de Antropologia. ISSN 0034-7701 Rev. Antropol. v. 42. n.1-2. UNICAMP. São Paulo. 1999. <https://doi.org/10.1590/S0034-77011999000100010>. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0034-77011999000100010&script=sci_arttext>. Acesso em 22.set.2019.

BRANDALIZE, M. C. B. **Topografia**. Apostila para a Engenharia Civil. Pontifícia Universidade Católica. Paraná, Rio Grande do Sul. Disponível em: <http://www.topografia.com.br/topografia_conteudo.asp?cat=dow&det=Download>. Acesso em 20.03.2018.

CREANGA, D.; NADEJDE, C.; GASNER, P. **Dynamical analysis of heart beat from the viewpoint Of chaos theory**. Rom. Journ. Phys., Vol. 56, Nos. 1–2, P. 177–184, Bucharest, 2011. Disponível em: <http://www.nipne.ro/rjp/2011_56_1-2/0177_0185.pdf>. Acesso em 31.mar.2019.

CUSTÓDIO, R.F. **Análise Não-Linear no Reconhecimento de Padrões Sonoros: Estudo de Caso para Sons Pulmonares**. Tese de Doutorado (Ciência da Computação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: PPGC da UFRGS, 1999. Disponível em: <<https://lume.ufrgs.br/handle/10183/17974>>. Acesso em 31.mar.2019.

FERREIRA, J. C. E. **Rugosidades**. Planejamento do Processo Assistido por Computador. Grima, Dep.Eng. Mecânica. UFSC. S/A. Disponível em: <http://www.grima.ufsc.br/capp/transparencias/TransparenciasCAPP_Rugosidades1.pdf>. Acesso em 07.fev.2019.

KIENITZ LEMOS, M. **Modelo Fractal das Microgêneses Cognitivas: uma metodologia para a mediação metacognitiva em jogos computacionais.** Rio de Janeiro, 2013. Dissertação (Mestrado em Informática) – Instituto de Matemática, Instituto Tércio Pacciti de Aplicações e Pesquisas Computacionais, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

KIENITZ LEMOS, M. *et al.* (2019). **Padrões na distribuição temporal de ações no game sugeridos por transdução para valores musicais.** Revista Scientiarum Historia, 2, 10. Recuperado de <<http://revistas.hcte.ufrj.br/index.php/RevistaSH/article/view/62>>.

LA TAILLE, Y.; OLIVEIRA, M. K.; DANTAS, H. **Piaget, Vygostsky, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão.** São Paulo: Summus, 1992.

LIVIO, M. **Symmetry rules.** Science in School. Issue: Summer. 2006. Disponível em: <https://www.scienceinschool.org/sites/default/files/teaserPdf/issue2_symmetry.pdf>. Acesso em 05. nov. 2019. Tradução de Ana Luísa Carvalho. Disponível em: <<https://www.scienceinschool.org/pt/2006/issue2/symmetry>>. Acesso em 05. nov. 2019.

MANDELBROT, B. **Fractais e a arte da rugosidade.** TED Conversations. 2010. Disponível em: <http://www.ted.com/talks/lang/pt-br/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness.html>. Acesso em 27. Out. 2013.

MANDELBROT, B.; FREEMAN, W. H. **The Fractal Geometry of Nature.**, San Francisco, CA, 1982. Disponível em: <https://users.math.yale.edu/~bbm3/web_pdfs/encyclopediaBritannica.pdf>. Acesso em 03. abr. 2019.

MANDELBROT, B.; FREEMAN, W. H. **Fractal analysis and synthesis of fracture surface roughness and related forms of complexity and disorder.** International Journal of Fracture. Springer. 2006. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10704-006-0037-z>>. Acesso em 03. Abr. 2019.

MARQUES, C. V. M. **EICA - estruturas internas cognitivas aprendentes: Um modelo neuro-computacional instanciando o sistema pessoa em espaços dimensionais.** Tese (doutorado) Programa de Engenharia de Sistemas e de Computação. Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

MONTEIRO, M. B. A. S. **Desenvolvimento de Ferramenta para a análise de Dados Complexos e sua Aplicação em Velocidade do Vento.** Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Engenharia Civil. Universidade Federal de Juiz de Fora. 2017.

MOTTE, A. **Newton, Isaac. Newtons Principia: the mathematical principles of natural philosophy.** New York: Daniel Adee, p.73. Disponível em: <http://redlightrobber.com/red/links_pdf/Isaac-Newton-Principia-English-1846.pdf>. Acesso em 21. Jul. 2020.

PIAGET, J. A. **Psicogênese dos conhecimentos e a sua significação epistemológica.** In: Piatelli-Palmarini, M. (Org.). Teorias da linguagem, teorias da aprendizagem. Um debate entre Jean Piaget e Noam Chomsky. Tradução de Rui Pacheco. Lisboa: Edições 70, 1987.